

La irresolubilitat dels problemes clàssics grecs.

Recurs didàctic per a l'ensenyament i l'aprenentatge

Ana Manzaneres Moreno

Enginyera de camins, canals i ports
amm@integras.es

Resum Abstract

Actualment, a Catalunya, l'ordenació curricular integra el concepte de competència bàsica per establir com han de desenvolupar-se l'acció educativa i el procés d'ensenyament-aprenentatge, cosa que comporta la necessitat d'actualitzar els continguts i els recursos que s'estan emprant diàriament a les aules. Els nous recursos han d'estar definits i planificats en funció d'una sèrie de pautes com són: la concreció dels criteris metodològics, organitzatius i d'avaluació, la duració de cada activitat, la contextualització per reforçar els aprenentatges, les mesures adequades d'atenció a la diversitat i a la bona gestió de l'aula... En definitiva, la planificació prèvia dels recursos i la màxima concreció possible en la definició seran condicions necessàries, per a l'èxit de l'acció educativa.

Entre altres tipus de continguts més teòrics i conceptuals (nombres, mesures, símbols, elements geomètrics, etc.), el currículum de l'assignatura de matemàtiques considera la història de les matemàtiques com un contingut més. I no tan sols contempla la història com un contingut, sinó que, a més, suggereix aproximacions de caràcter històric a determinats continguts teòrics matemàtics amb les quals es pretén mostrar el desenvolupament històric de les matemàtiques com a ciència en evolució i evidenciar contextos on els continguts adquiriren significat.

La utilització de la història de les matemàtiques per dissenyar activitats té múltiples opcions: pot servir com a introducció d'un tema o d'un concepte nou, pot situar un concepte matemàtic en el temps, contribueix a fer l'aprenentatge més significatiu, ajuda a finalitzar una seqüència d'activitats, pot servir també per aprofundir en un tema concret i té la capacitat d'interrelacionar transversalment les diferents àrees de les matemàtiques.

Veient la necessitat de crear nous recursos didàctics i aprofitant totes aquestes opcions que la història de les matemàtiques ens proporciona, es van crear les tres activitats proposades a partir de la «falsa» irresolubilitat dels problemes clàssics grecs.

Currently in Catalonia, the «ordenació curricular» integrates the concept of «competència bàsica» to establish how they should develop educational activities and teaching-learning process, which implies the need to update the content and resources we are using every day in the classroom.

The new resources must be defined and planned according to a series of guidelines as: specification of methodological, organizational and assessment criteria, the duration of each activity, the context to reinforce the learning, appropriate measures to attention to diversity and good classroom management ... In short, the pre-planning of resources and the highest possible precision in the definition be necessary, but not sufficient, for the success of an educational activity.

Among other more theoretical and conceptual content (numbers, measurements, symbols, geometric elements, etc.), the mathematics curriculum considers the history of mathematics as a content. And not only covers the history as a content, but also suggests a historical approach to certain theoretical mathematics as an attempt to show the historical development of mathematics as a science in evolution and demonstrate contexts where contents achieve meaningful. Using the history of mathematics has many options for design activities: it can serve as an introduction to a topic or a new concept, a mathematical concept can be located in time, help to make learning more meaningful, help to finish a sequence of activities, can also be used to further a particular topic and has the ability to interact across different areas of mathematics. Seeing the need to create new educational resources and taking advantage of all the options that the history of mathematics provides, three activities were created and proposed from the «dummy» insolubility of classical Greek problems.

1. La història de les matemàtiques com a recurs didàctic

Seguint la definició de competència que s'estableix al currículum, marc legal vigent avui dia, les matemàtiques són un instrument de coneixement i d'anàlisi del món que ens envolta i al mateix temps constitueixen un conjunt de sabers de gran valor cultural, que ajuden a raonar, de manera crítica, sobre les diferents realitats i els diferents problemes actuals.

L'assoliment de la competència matemàtica requereix un determinat tipus de tasques a l'aula, amb objectius diversos: introduir termes matemàtics, facilitar contextos on trobar idees, aplicar conceptes desenvolupats anteriorment, revisar o consolidar conceptes per promoure la reflexió i la integració... (Guevara, citant Mason i Johnston-Wilder,¹ 2009). La introducció a l'aula d'un context històric matemàtic pot ajudar en la consecució d'aquests objectius.

La història de les matemàtiques mostra el desenvolupament del coneixement matemàtic i explica els processos que han calgut per arribar al moment actual. Així, el llegat que deixa la història per a les generacions següents permet analitzar uns fets des de diferents perspectives, tot reinterpretant el passat amb els ulls del present (Guevara, citant Grattan-Guinness,² 2009). Aquest llegat es pot relacionar amb l'ensenyament de les matemàtiques actuals des de dos vessants: l'ús de la història com a context d'aprenentatge i l'aportació de la història a les matemàtiques (Guevara, 2009).

Diversos autors³ han plantejat que un factor important en l'ús de la història per a l'ensenyament de les matemàtiques és la relació entre el desenvolupament del pensament dels alumnes i el desenvolupament de la pròpia història. A través de les dificultats i els encerts que s'han produït durant el desenvolupament històric de les matemàtiques, els alumnes poden arribar a identificar el perquè de les seves dificultats davant l'aprenentatge, de manera que s'està treballant implícitament en l'àmbit del desenvolupament emocional i social de l'alumne, millorant la seva autoestima i ajustant el seu autoconcepte.

D'altra banda, l'aportació de la història al professorat pot ser implícita: per decidir seqüències i maneres d'introduir els conceptes i perquè dóna elements per entendre les reproduccions de l'alumnat; i també pot ser explícita: com a element de referència per dissenyar activitats amb situacions històriques (Guevara, 2009).

Les teories de l'aprenentatge parlen de la necessitat que els alumnes comencin amb experiències concretes i, a partir d'aquestes experiències, generalitzin. Experimentar amb aplicacions múltiples dels nombres i dels objectes matemàtics, amb les diferents maneres de representar-los i de descriure'ls, com es pot trobar en la història, ajudarà en el procés de generalització (Guevara 2009).

La història mostra que les matemàtiques s'han desenvolupat a partir de la resolució de problemes i que aquesta és una de les raons per fer que la resolució de problemes sigui el nucli de les activitats d'aprenentatge a l'aula (Guevara, citant Barbin,⁴ 2009). Però es pot prendre com a estratègia didàctica, a més, la inclusió de la història de manera explícita per dissenyar les activitats, explicant el context

1. Mason, John; Johnston-Wilder, Sue (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. St.Albans/Milton Keynes, UK: Tarquin Publications & Open University.

2. Grattan-Guinness, Ivor (2004). *History of the Mathematical Sciences*. India: Hindustan Book Agency.

3. Guevara, citant Furinghetti, Fulvia i Radford, Luis (2008) «Contrasts and oblique connections between historical conceptual developments and classroom learning in mathematics». Dins: English, Lyn D., et al. (eds.), *Handbook of International research in mathematics education*. Nova York: Taylor & Francis, 626-655; Jonh Fauvel, Jan van Maanen, 2000.

4. Barbin, Evelyn (2000). Integrating history: research perspectives. Dins John Fauvel I Jan van Maanen (eds.) (2000), *History in Mathematics Education*. The ICMI Study. Dordrecht/Boston/Londres: Kluwer Academic Publishers, 63-90.

cultural en el qual es desenvolupen, localitzant els coneixements dins la història de la humanitat i de les idees. Tenint en compte, però, que en cap cas les matemàtiques es poden substituir per l'ensenyament de la seva història.

La utilització de la història per ensenyar matemàtiques és un recurs reconegut internacionalment. En els darrers anys, diversos països (Regne Unit, Grècia...) han introduït explícitament la història de les matemàtiques en el seu currículum, com ha estat el cas de Catalunya. Des del Regne Unit (2009), per exemple, es defensa que la història permet establir connexions entre les diferents àrees del currículum i també entre diferents parts de les matemàtiques que tradicionalment no s'havien relacionat. Des de Grècia (2007) es justifica que la història estimula l'interès de l'alumnat i li fa tenir una actitud positiva, revela i reforça la naturalesa humana de les matemàtiques i contribueix a entendre els conceptes i els problemes, perquè dona a conèixer el context i les circumstàncies que els van originar, així com les condicions del seu desenvolupament.

Per tant, la història de les matemàtiques és un recurs per dur a terme les matemàtiques fora de l'àmbit estret de la disciplina, per buscar connexions i vincles amb altres contextos disciplinaris, per determinar el seu canvi d'imatge amb els estudiants, per ressaltar la font del context sociocultural (Demattè, 2006). Un recurs que permet contextualitzar millor el contingut matemàtic i que proporciona dos components de treball: el mateix desenvolupament històric i els aspectes de la competència matemàtica que es volen fomentar.

Que en els nous currículums es reconegui que la història de les matemàtiques és un recurs a considerar en la planificació de la programació i de les activitats és un element motivador per dissenyar nous exercicis en aquest context.

De totes maneres, s'ha de tenir present que mostrar l'evolució històrica dels conceptes o raonaments és un procés llarg i en un curs acadèmic no es podrà fer més de tres o quatre cops.

2. La necessitat de crear nous recursos didàctics

Es pretén elaborar noves eines i recursos que permetin al docent presentar activitats que els alumnes puguin rebre amb una bona disposició per a l'aprenentatge i que els faci aconseguir més i millors nivells de coneixement; assolir, per tant, les competències bàsiques. També es pretén col·laborar per a una millor eficiència i eficàcia del treball del professorat.

Les activitats que es presenten s'han dissenyat a partir del marc que proporcionen els actuals currículums de l'ESO i del Batxillerat, que donen una gran importància a l'aportació didàctica i competencial i que consideren la història de les matemàtiques com un recurs més. Dins dels currículums, al final dels continguts de cada curs, se suggereixen, a tall d'exemple, aproximacions de caràcter històric a continguts determinats, amb les quals es pretén, d'una banda, mostrar el desenvolupament històric de les matemàtiques com a ciència en evolució i sotmesa a canvis, i, de l'altra, evidenciar contextos on aquests continguts van adquirir el seu significat.

No obstant això, també estan plantejades a partir de les necessitats que ha generat l'ús de les TIC a les aules, que requereixen propostes didàctiques per treballar amb l'ordinador.

D'altra banda, es pretén aportar recursos innovadors, amb noves estratègies de treball dins de l'aula, d'atenció a la diversitat, per a la millora de la gestió de l'aula, per millorar la motivació de l'alumnat,

amb criteris d'avaluació sumativa... intentant integrar tot el que implica l'ensenyament per competències.

A més, es va poder comprovar que aquest apartat de la història de les matemàtiques no s'havia contemplat encara en cap de les activitats disponibles en el projecte ARC⁵ del Creamat.⁶

La temàtica proposada consisteix a considerar els tres problemes clàssics grecs sense solució amb regla i compàs: la trisecció de l'angle, la quadratura del cercle i la duplicació del cub, per plantejar diverses activitats per realitzar a l'aula. Aquestes propostes didàctiques podran ser utilitzades per a la pràctica professional i s'hi podran treballar molts conceptes matemàtics per tal d'abastar diferents nivells de coneixements, mitjançant recursos i eines tradicionals i altres d'innovadors, així com aprofitant l'estudi de la història de les matemàtiques.

3. Plantejament dels recursos

Hi ha nombrosos treballs publicats sobre aquests tres problemes. Per exemple, l'article «Trisecció, quadratura i duplicació: tres problemes de la matemàtica clàssica grega» de Francesc Xavier Barca Salom (2009), en què es fa una detallada descripció de l'evolució d'aquests tres problemes al llarg de la història, des del seu origen fins a les diferents solucions plantejades. A més, s'explica per què aquests tres problemes són irresolubles amb la geometria euclidiana.

A part de la documentació teòrica, també es disposa de construccions interactives, com per exemple les pràctiques que proposa el professor Pep Bujosa al web: <http://www.xtec.es/~jbujosa/GeoGebra/problemesclassics/classics.htm>, on es pot treballar una solució per a cada un dels tres problemes amb el programa Geogebra.

Malgrat la nombrosa quantitat de documentació trobada en relació amb els tres problemes clàssics grecs, finalment dues de les tres activitats plantejades en aquest treball es basen en les solucions proposades en el llibre *Vitaminas matemáticas* de Claudi Alsina (2008). En aquest llibre de divulgació matemàtica, es plantegen cent qüestions que pretenen incitar la curiositat del lector, amb un llenguatge senzill i comprensible. Entre aquestes cent qüestions hi ha tres possibles solucions per als tres problemes que ens ocupen.

A partir d'aquestes solucions, s'han plantejat les activitats corresponents a la quadratura del cercle i a la duplicació del cub. En canvi, l'activitat corresponent a la trisecció de l'angle està basada en aportacions pròpies.

Activitat 1. Trisecció d'angles amb regla i compàs

Com que aquesta activitat està prevista per al primer curs de l'ESO, el contingut ha de ser adient per a alumnes amb edats compreses entre els dotze i els catorze anys, que acaben d'arribar a l'educació secundària provinents de l'educació primària amb diferents nivells de coneixements previs.

5. ARC: *Aplicació de Recobriment Curricular*. Recull d'activitats, seqüències didàctiques i recursos que enllacen directament amb el currículum de les àrees de matemàtiques. S'ha creat i es manté des dels CESIRES, Centres de Suport a la Innovació i a la Recerca Educativa del Departament d'Educació. (<http://arc-educacio.cat>)

6. CREAMAT: Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques del Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. (<http://phobos.xtec.cat/creamat/joomla>)

En aquest cas s'ha optat per una activitat manipulativa senzilla, basada en un context històric, però amb eines tradicionals de la geometria (escaire, cartabó i compàs). L'objectiu principal és fixar conceptes bàsics de la geometria com l'angle recte, la bisectriu, els triangles isòsceles i escalè... a part de plantejar una sessió no magistral i sí manipulativa, amb una introducció històrica per al grup classe.

Planificació

Està previst fer les explicacions i el raonament, en conjunt, per al grup classe i posteriorment passar al treball manipulatiu, per parelles. Cada parella d'alumnes haurà de tenir un regle graduat, un escaire, un cartabó, un transportador d'angles i un compàs, a més de paper blanc (no llibretes). Per a la totalitat del grup classe, el professor prepararà unes diapositives per a les explicacions sobre la història dels problemes clàssics grecs sense solució, a més de compàs, escaire i cartabó per treballar a la pissarra i el full de l'alumne amb la descripció de l'activitat. La duració de la sessió és d'una hora.

Avaluació

S'haurà d'avaluar l'expressió verbal de raonaments i informacions que incorporin elements matemàtics i valorar la utilitat del llenguatge matemàtic. Caldrà analitzar i avaluar les estratègies i el pensament matemàtic dels altres, a través del treball per parelles i en la posada en comú amb tota la classe. Es valoraran els fets d'utilitzar nombres enters, fraccions, decimals i percentatges; aplicar el coneixement geomètric per descriure el món físic; estimar, mesurar i resoldre problemes de longituds i amplituds. També es farà una valoració del treball a classe, de les aportacions i els comentaris durant el raonament i de la presentació de l'activitat acabada.

Actuació docent

1. Introducció històrica sobre els problemes clàssics grecs (15 min).
2. Definició de bisecció (bisectriu) i trisecció (15 min).
3. Identificació dels angles coneguts de l'escaire i el cartabó (10 min).
4. Treball manipulatiu per triseccar els angles que es poden triseccar (20 min).

Atenció a la diversitat

Aquesta activitat, en si mateixa, es considera com una opció per atendre alumnes amb greus mancances en conceptes bàsics geomètrics, que no podran avançar en matemàtiques sense consolidar-los prèviament.

No obstant això, també pot ser adaptada per a alumnes amb altres necessitats:

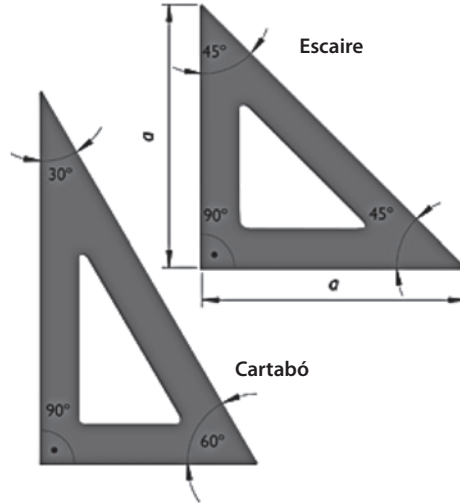
- Aquesta activitat també es pot treballar amb el programa Geogebra o amb el software R.a.C. (alternativa al Geogebra específic per a dibuixos amb regle i compàs) <http://zirkel.sourceforge.net>
- Per als alumnes amb més capacitat es podria explicar breument la corba d'Hípies o l'invent de la destal índia.
- Una altra opció pot ser treballar el procés d'Arquimedes, que necessita només un regle, un compàs, una transparència i un rotulador.⁷

7. Alsina, C. (2008). *Vitaminas matemáticas* (1a ed.). Barcelona: Ariel, pàg. 86-88.

DOCUMENT DE L'ALUMNE

LA TRISECCIÓ DE L'ANGLE

A partir de l'escaire i el cartabó, identifiqueu angles que es puguin trisecar:



Introducció històrica

Des dels seus orígens, l'home ha intentat representar el món i es considera que aquestes representacions són l'origen de la geometria. L'home primitiu, en intentar representar el medi on vivia, reflectia en forma de figures esquemàtiques la realitat que observava. Per tant, les pintures rupestres poden ser considerades l'origen de la geometria.

La geometria per als egipcis, els babilonis i altres pobles antics orientals, com els indis o els xinesos, consistia en un conjunt de regles i coneixements pràctics obtinguts experimentalment, però no era una ciència estructurada. No va ser fins el segle VII aC, que es va introduir la geometria a Grècia des d'Egipte.

La geometria grega parteix dels coneixements pràctics de les civilitzacions anteriors i fa un pas cap a l'abstracció. Així, van arribar a les formes geomètriques perfectes a través de l'observació de la naturalesa. Euclides és el màxim representant i és considerat el pare de la geometria. En la seva obra, *Elements*, agrupa tot el coneixement i formalitza la geometria com una ciència deductiva. Aleshores necessiten crear instruments per poder representar les figures que s'imaginaven i van crear, entre d'altres, el regle i el compàs.

Els grecs no podien fer càlculs aritmètics, perquè el seu sistema de numeració només representava els nombres naturals, no tenia el zero, els negatius, ni els decimals. Es van basar en el regle i el compàs per fer totes les construccions. Un regle sense marques perquè, si no tenien aritmètica, no els servien de res. Els grecs solucionaven els problemes gràficament, fent construccions amb regle i compàs, com a substitució de l'aritmètica.

Durant la segona meitat del segle v aC, es va produir un gran desenvolupament de la geometria: els pensadors grecs es van dedicar a l'estudi de qüestions purament teòriques i no tan pràctiques com fins al moment. És en aquest període quan es plantegen els tres problemes clàssics: la quadratura del cercle, la duplicació del cub i la trisecció d'un angle. Donat un angle arbitrari, consisteix a construir amb regla i compàs un angle que tingui un terç de l'obertura de l'angle original.

D'aquest problema no se'n coneix l'origen, només se sap que també data de l'antiga Grècia. Més de 2.200 anys després es va demostrar que aquest problema és irresoluble utilitzant només regla i compàs. Tot i això, l'estudi d'aquest problema, entre d'altres, ha contribuït de manera molt important al llarg de la història al desenvolupament de les matemàtiques gràcies als esforços fets per resoldre'l. La impossibilitat de triseccar un angle va ser demostrada per Pierre Wantzel (1814-1848) l'any 1837.

Activitat 2. La quadratura del cercle

L'activitat està prevista per al tercer curs de l'ESO, en què els alumnes tenen edats compreses entre els catorze i els setze anys i que ja han superat el primer cicle.

En aquest cas s'ha optat per la solució proposada pel catedràtic Claudi Alsina,⁸ perquè s'ha pogut plantejar una activitat que combina elements manipulatiu amb l'ús de programes informàtics per resoldre un problema geomètricament però que s'ha de comprovar a partir de càlculs algebraics. A més, s'aprofita el context de l'activitat per analitzar el concepte d'exactitud. Tot plegat, partint d'una introducció històrica que planteja el problema que cal resoldre, conduït pel professorat i incidint més en la utilització de les eines matemàtiques (geometria, àlgebra...), en l'aplicació de coneixements ja apresos i en la contextualització històrica, que no pas en la mateixa resolució.

Planificació

Està previst donar explicacions i fer raonaments per al grup classe i posteriorment un treball manipulatiu individual i la resolució escrita del problema, així com l'ús d'eines informàtiques. Cada alumne disposarà d'un cilindre, d'un regla graduat i d'un ordinador. Per al grup classe, el professor prepararà el material següent: diapositives per a les explicacions sobre la història dels problemes clàssics grecs sense solució, pissarra digital i ordinador i full de l'alumne amb la descripció de l'activitat. La duració de la sessió és d'una hora.

Avaluació

S'avaluarà el fet de resoldre problemes utilitzant símbols i mètodes algebraics i altres mètodes de resolució possibles, per exemple, la representació geomètrica; el fet d'expressar verbalment amb precisió, raonaments, relacions quantitatives i informacions que incorporin elements matemàtics, la utilitat i la simplicitat del llenguatge matemàtic i la seva evolució al llarg de la història. S'analitzaran i s'avaluaran les estratègies i el pensament matemàtic dels altres, a través de la posada en comú amb tota la classe. Es tindrà en compte la comunicació del pensament matemàtic propi i el fet de contrastar-lo amb els dels companys.

8. *Op. cit.*, pàg. 83-87.

Actuació docent

1. Introducció històrica sobre els problemes clàssics grecs (10 min).
2. Plantejament del problema amb el document de l'activitat (5 min).
3. Treball manipulatiu per poder resoldre el problema (5 min).
4. Treball individual per realitzar l'activitat (30 min).
5. Posada en comú dels resultats (10 min).

Atenció a la diversitat

Aquesta activitat també es pot treballar amb el *software* R.a.C., alternativa al Geogebra específic per a dibuixos amb regla i compàs i més senzill. Per als alumnes amb més capacitat, es pot plantejar una última qüestió per resoldre a casa: per què el nombre $\sqrt{\pi}$ no es pot dibuixar amb regla i compàs.

DOCUMENT DE L'ALUMNE

LA QUADRATURA DEL CERCLE

Donat un cercle de radi r , el problema que ens plantejem és determinar el costat, $a = ?$, d'un quadrat que tingui la mateixa àrea que el cercle inicial.

a) Determineu les àrees d'ambdues figures

Àrea del cercle inicial: $A_O =$

Àrea del nou quadrat: $A_C =$

b) Resoleu aquest problema algebraicament. Trobeu el valor de $a = ?$

En aquest moment tenim resolt el problema, però el que busquem és una solució gràfica i no tan sols algebraica. Ho farem a partir del cilindre.

c) Marqueu un punt a la vora del cilindre i feu-lo rodar pel paper fins que faci una volta sencera. Què mesura aquest segment?

d) Traslladeu aquest segment al Geogebra i seguieu el procés de construcció geomètrica detallat a continuació mitjançant el Geogebra:

- Denomineu A i B als extrems del segment.
- Traceu la mediatriu del segment i marqueu el punt mig Q .
- A continuació de l'extrem B , afegiu un altre segment de longitud r , el radi de la base del cilindre, i denomineu C el nou extrem.
- Feu una circumferència entre els punts Q i C , extrems del diàmetre horitzontal, i dibuixeu la recta perpendicular a aquest diàmetre que passi pel punt B . Denomineu R el punt de tall de la perpendicular amb la circumferència.

Hem trobat el segment \overline{BR} a partir d'una construcció geomètrica. Demostrarem que aquest segment mesura exactament a , costat del quadrat que busquem.

e) Calculeu el valor de \overline{BR} a partir de plantejar el teorema de Pitàgores en els tres triangles resultants de la figura: Triangle 1: QBR , Triangle 2: BCR i Triangle 3: QCR .

f) Quina mesura tindrà el costat del quadrat? Considereu que té molta o poca exactitud?

Introducció històrica

Des dels seus orígens, l'home ha intentat representar el món i es considera que aquestes representacions són l'origen de la geometria. Per als egipcis, els babilonis i altres pobles antics orientals, com els indis o els xinesos, consistia en un conjunt de regles i coneixements pràctics obtinguts experimentalment, però no era una ciència estructurada. No va ser fins al segle VII aC, quan es va introduir la geometria a Grècia des d'Egipte.

La geometria grega parteix dels coneixements pràctics de les civilitzacions anteriors i fa un pas cap a l'abstracció. No obstant això, els grecs no podien fer càlculs aritmètics, perquè el seu sistema de numeració només representava els nombres naturals, no tenia el zero, ni els negatius, ni els decimals. Es van basar en el regle i el compàs per fer totes les construccions. El regle no tenia marques perquè, si no tenien aritmètica, no els servia de res. Els grecs solucionaven els problemes gràficament, fent construccions amb regle i compàs, com a substitució de l'aritmètica.

La quadratura del cercle és un problema geomètric proposat per matemàtics de la Grècia clàssica. És el repte de fer la construcció, amb regle i compàs, d'un quadrat amb la mateixa àrea que un cercle donat utilitzant un nombre finit de passos. La primera referència històrica que es té respecte aquest problema és d'Anàxàgores, un dels matemàtics de l'època heroica, dels voltants del 450 aC, però no va ser fins el 1882 que es va demostrar que el problema era irresoluble, com a conseqüència del teorema de Lindemann-Weierstrass, que demostra que π és un nombre transcendent, en lloc de ser un nombre algebraic. És a dir, π no és l'arrel de cap polinomi amb coeficients racionals.

Aquest problema, juntament amb la duplicació del cub i la trisecció de l'angle, va servir d'incentiu als matemàtics grecs per a la recerca de noves corbes. Així van aparèixer les còniques i altres corbes cúbiques o transcendents. És per això que l'estudi d'aquests tres problemes constitueix un material privilegiat per conèixer el desenvolupament de les tècniques geomètriques.

La sorpresa és que aquest problema impossible amb regle i compàs té nombroses solucions amb altres instruments, com comprovarem en aquesta activitat.

Activitat 3. La duplicació del cub

L'activitat està prevista per al primer curs de batxillerat, en què els alumnes tenen edats superiors als setze anys, ja han superat tota l'educació obligatòria i s'estan preparant per a l'ensenyament universitari.

En aquest cas s'ha optat per la solució proposada pel catedràtic Claudi Alsina,⁷ perquè s'ha pogut plantejar una activitat que proposa un repte a l'alumne, que ha de resoldre a partir de programes informàtics i de coneixements ja estudiats amb anterioritat de diferents branques de les matemàtiques (funcions, còniques, polinomis...). Partint d'una introducció històrica, es planteja l'activitat, però no conduïda pel professor, que ha d'actuar més com a observador i intervenir només en cas de necessitat, i es basa en l'aplicació de coneixements previs per resoldre un problema en un context històric.

Planificació

Està previst fer explicacions i raonament per al grup classe i posteriorment treball individual i resolució escrita del problema, així com l'ús individual d'eines informàtiques. Cada alumne haurà de disposar

d'un ordinador. Per a la totalitat del grup classe, el professor disposarà del material següent: diapositives per a les explicacions sobre la història dels problemes clàssics grecs sense solució, pissarra digital i ordinador, i full de l'alumne amb la descripció de l'activitat. La duració de la sessió és d'una hora.

Avaluació

S'avaluaran els fets de distingir els nombres reals de les seves aproximacions; relacionar entre descomposició de polinomis i la resolució d'equacions polinòmiques; relacionar zeros d'un polinomi amb les solucions de l'equació polinòmica; operar algebraicament; treballar amb les equacions de les còniques; conèixer les característiques de la funció de proporcionalitat inversa; utilitzar amb soltesa la calculadora i l'ordinador per facilitar càlculs, fer representacions gràfiques, i explorar i simular situacions. Es valorarà fer servir intel·ligentment les TIC i interpretar els resultats d'una operació automàtica en el context del problema resolt. També es tindrà en compte la comunicació del pensament matemàtic propi.

Actuació docent

1. Introducció històrica sobre els problemes clàssics grecs (10 min).
2. Plantejament del problema a través del document de l'activitat per a l'alumne (10 min).
3. Treball individual per poder resoldre el problema (40 min).

Atenció a la diversitat

Utilització de programes informàtics (Wiris) per resoldre el sistema d'equacions i no haver d'aturar el procediment de resolució del problema. A més, servirà per comparar resultats.

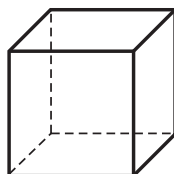
Participació més activa del professor si comprova que els alumnes no segueixen el raonament induït de les preguntes proposades. En principi, el professor no havia de col·laborar perquè es busca la deducció per part de l'alumne, però, evidentment, ho pot fer.

Per als alumnes amb més capacitat, es pot plantejar una última qüestió per resoldre a casa: per què el número $\sqrt[3]{2}$ no es pot dibuixar amb regla i compàs.

DOCUMENT DE L'ALUMNE

LA DUPLICACIÓ DEL CUB

Donat un cub que té com a costat la unitat, $c = 1$, el problema que ens plantegem és determinar el costat, $L = ?$, d'un nou cub que tingui el doble de volum que el cub inicial.



g) Determineu els volums d'ambdós cubs

Volum del cub inicial: $V_0 =$

Volum del nou cub: $V_1 =$

h) Resoleu aquest problema algebraicament. Trobeu el valor de $L = ?$

En aquest moment tenim resolt el problema, però el que busquem és una solució gràfica i no tan sols algebraica.

- i) Dibuixeu amb Geogebra la funció $f(x) = \frac{2}{x}$
- j) Dibuixeu amb Geogebra la circumferència de centre $A(1, 0.5)$ i que passi pel punt $P(2, 1)$
- k) Determineu l'equació de la circumferència.
- l) Busqueu els punts que tenen en comú ambdues figures i resoleu el sistema d'equacions, a partir de la factorització polinòmica.
- m) Verifiqueu la solució trobada amb la calculadora Wiris.
- n) Identifiqueu gràficament el valor de $\sqrt[3]{2}$

Introducció històrica

Aquest problema té un origen místic. Al voltant de l'any 428 aC, una epidèmia de pesta va arrasar Atenes i, per solucionar-ho, es va enviar un missatger a consultar l'oracle d'Apol·lo a Delfos. La resposta de l'oracle va ser que per acabar amb l'epidèmia calia construir un nou altar cúbic per al déu Apol·lo que duplicués l'altar cúbic que hi havia al temple. Com que el problema no té solució, l'epidèmia continuà el seu procés natural, en el supòsit de la infal·libilitat de l'oracle.

La geometria grega no podia fer càlculs aritmètics, perquè el seu sistema de numeració només representava els nombres naturals, no tenia el zero, ni els negatius, ni els decimals. Per tant, mai es definia la longitud d'un segment, ni l'àrea d'una figura plana, sinó que es treballava amb figures geomètriques establint criteris d'igualtat i comparació entre elles. Així, van entendre que, per fer el que deia l'oracle, havien de construir un cub que es dividís en dues figures iguals que l'altar que tenien. Els habitants d'Atenes van construir un cub que tenia el doble de costat i era vuit vegades més gran. I l'epidèmia no es va acabar.

Siguin o no certes aquestes històries, el fet és que alguns membres de l'Acadèmia Platònica van estudiar el problema de la duplicació i van proposar solucions. Aquest problema, juntament amb la quadratura del cercle i la trisecció de l'angle, va servir d'incentiu als matemàtics grecs per a la recerca de noves corbes. Així van aparèixer les còniques i les corbes cúbiques. És per això que l'estudi d'aquests tres problemes constitueix un material privilegiat per conèixer el desenvolupament de les tècniques geomètriques.

Una de les solucions va ser plantejada per Menecm (aprox. 350 aC) a partir de la intersecció entre una paràbola i una hipèrbola equilàtera. A partir d'aquesta solució s'atribueix a Menecm el descobriment i els estudis de les primeres propietats de les còniques (el·lipse, hipèrbola i paràbola) com a seccions d'un con recte de base circumferència.

Se sap que Menecm va ser mestre d'Alexandre el Gran i una llegenda li atribueix que, a una pregunta del rei, sobre si hi havia alguna drecera per adquirir els coneixements geomètrics, Menecm

va contestar: «Oh, rei! Per viatjar pel país hi ha camins reals i camins per a ciutadans comuns, però en Geometria hi ha un únic camí per a tots».

No va ser fins l'any 1837 que P. Wantzel va demostrar la impossibilitat de resoldre aquest problema amb regle i compàs.

Conclusions

Com a resum, es pot concloure que el nou enfocament de l'ordenació curricular fa necessaris l'aportació de nous recursos, l'elaboració d'activitats, la programació d'unitats didàctiques, el plantejament de nous problemes... que estiguin dissenyats des d'un punt de vista competencial i, en particular, es pot fer a través d'un context històric per aprofitar totes les aportacions que se'n poden extreure.

Queda, per tant, molta feina a fer per part dels membres de la comunitat educativa, per poder augmentar la quantitat de recursos disponibles amb un bon disseny competencial per presentar a l'aula i que estiguin desenvolupats segons requereix l'aplicació del currículum vigent actualment, ja siguin contextualitzats en la història de les matemàtiques o en altres contextos significatius. Aquí s'hi ha volgut posar un petit gra de sorra, però la muntanya s'ha de fer més gran. Ànims i bona feina.

Bibliografia

Alsina, C. (2008). *Vitaminas matemáticas* (1a ed.). Barcelona: Ariel, pàg. 83-87.

Barca, F. X. (2010). *Trisecció, quadratura i duplicació: tres problemes de la matemàtica clàssica grega*. Barcelona: Universitat Politècnica de Catalunya. <<http://hdl.handle.net/2117/10355>> [Consulta: abril 2011]

Barrow, J. D. (2009). *El salto del tigre: Las matemáticas de la vida cotidiana* (1a ed.). Barcelona: Crítica.

Demattè, A. (2006). *Fare matematica con i documenti storici. Una raccolta per la scuola secondaria di primo e secondo grado*. Trento: Editore Provincia Autonoma di Trento-IPRASE del Trentino.

Guevara, I. (2009). *La història de les matemàtiques dins dels nous currículums de secundària: La introducció de contextos històrics a l'aula, un recurs per millorar la competència matemàtica*. <<http://phobos.xtec.es/sqfpp/resum.php?codi=1864>> [Consulta: maig 2011]

Guzman, M. de (2003). *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas* (1a ed.). Barcelona: Anaya.

Margalef, J. i Outerelo, E. (2007). *Matemáticas al alcance de todos* (1a ed.). Madrid: Pearson Educación, pàg. 201-206.

Currículums i competències

http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet/file.php?file=docs/ESO/curriculum_eso.pdf
 Currículum Educació Secundària Obligatòria. Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya. [Consulta: 9 de maig de 2011]

<http://phobos.xtec.cat/edubib/intranet/index.php?module=Pages&func=display&pageid=22>
Currículum Batxillerat. Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya.
[Consulta: 9 de maig de 2011]

<http://phobos.xtec.cat/creammat/joomla>
CREAMAT, Centre de Recursos per Ensenyar i Aprendre Matemàtiques. Departament d'Educació de la Generalitat de Catalunya.

Pàgines web

<http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/MundoMatematicas/Triseccion/node5.html>
El Mundo de las Matemáticas. Imposibilidad de algunas construcciones.
[Consulta: abril 2011]

<http://www.xtec.es/~jbujosa/GeoGebra/problemesclassics/classics.htm>
Pràctiques per treballar amb el programa Geogebra
[Consulta: abril 2011]

<http://zirkel.sourceforge.net>
Software R.a.C., programa específic per a dibuixos amb regle i compàs
[Consulta: abril 2011]

http://portales.educared.net/wikiEducared/index.php?title=Ángulos#.C3.81ngulos_de_la_escuadra_y_el_cartab.C3.B3n
Educared. Fundación telefónica
[Consulta: maig 2011]

